

# ANALISIS KINEMATIK ROBOT KOORDINAT BOLA, ENAM DERAJAT KEBEBASAN DENGAN METODE *QUATERNION* & *ROTATION VECTOR*

Matius Irsan Kasau, ST. Aminah Dinayati Ghani  
Dosen Kopertis IX/dpk pada STMIK Dipanegara Makassar  
Irsan.kasau@dipanegara.ac.id, dinayati.amy@dipanegara.ac.id

## Abstrak

Robot Koordinat Bola merupakan salah satu jenis robot dari setidaknya empat jenis robot yang konfigurasi gerakannya canggih dan rumit. Tiga jenis lainnya adalah Robot Cartesian, Robot Silinder dan Robot Artikulasi. Tingkat kecanggihan suatu robot dapat dilihat dari jumlah derajat kebebasannya. Robot paling canggih saat ini memiliki hingga puluhan derajat kebebasan. Adapun tulisan ini hanya enam derajat kebebasan yaitu kombinasi dari enam variasi gerakan translasi dan rotasi untuk mengarahkan TCP (Tool Center Point) dari robot melintasi suatu trayektori dari titik kedudukan awal ke titik kedudukan akhir yang akan dituju TCP lengan robot. Untuk Robot Koordinat Bola yang ditinjau, keenam derajat kebebasannya terdiri atas satu gerak translasi dan lima gerak rotasi yang dianalisis menggunakan metode *quaternion* dan *rotation vector*. Metode *quaternion* merupakan gabungan sebuah satuan scalar dan tiga satuan vektor, sementara *rotation vector* merupakan vektor tiga dimensi yang terdiri atas empat elemen *quaternion*.

Hasil analisis dengan metode ini memberikan gambaran yang mudah dipahami dan dimengerti mengenai cara kerja robot yang canggih dan rumit.

**Kata Kunci:** Robot Bola, Quaternion, Rotation Vektor, Derajat Kebebasan, Canggih

## Abstract

Spherical Coordinate Robot is one type of robot from at least four types of robots that are sophisticated and complicated motion configuration. The other three types are Cartesian Robot, Cylinder Robot and Articulation Robot. The level of sophistication of a robot can be seen from the number of degrees of freedom. The most advanced robots today have up to tens degrees of freedom. As for this paper only six degrees of freedom is a combination of six variations of translational and rotational movement to direct the TCP (Tool Center Point) of the robot across a trajectory from the starting point to the final position to which the TCP robot arm will go. For the observed Ball Coordinate Robot, the six degrees of freedom consisted of one translational motion and five rotational motions analyzed using quaternion and rotation vector methods. The quaternion method is a combination of a scalar unit and three vector units, while the vector rotation is a three-dimensional vector consisting of four quaternion elements.

The results of the analysis with this method provide an easy to understand and understand picture of how robotic and sophisticated robots work.

**Keywords:** Ball Robot, Quaternion, Rotation

## 1. PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Robot adalah suatu mesin yang bagian utamanya terdiri atas manipulator, *actuator* dan *controller*. Manipulator merupakan struktur gerak mekanik "*link*" dan "*joint*", *actuator* merupakan penggeraknya, sementara *controller* merupakan pengendalinya [1,3]. Robot diciptakan untuk mengerjakan bermacam macam tugas, khususnya tugas 3D yakni *Dirty*, *Dangerous* dan *Difficult*. Secara ideal robot diharapkan dapat melihat, mendengar, meraba, mencium dan merasa seperti panca indera manusia yang masing masing dalam wujud sensor-sensor [4]. Setiap satu derajat kebebasan dilengkapi dengan satu jenis sensor. Jadi robot dengan enam derajat kebebasan dilengkapi

dengan enam sensor untuk mendeteksi dan menganalisa lingkungannya dan dapat melakukan tindakan-tindakan yang terprogram menurut fungsinya masing masing.

Robot dapat digolongkan menurut sumber tenaganya (elektrik, hidraulik atau *pneumatic*), menurut tingkat kerumitannya (robot sederhana, sedang hingga canggih atau rumit). Dikatakan sederhana jika derajat kebebasannya satu hingga tiga, sedang jika derajat kebebasannya empat hingga enam dan canggih atau rumit jika derajat kebebasannya tujuh atau lebih. Ada yang menggolongkan menurut daya angkatnya (ringan, sedang berat), ada yang menggolongkan menurut kecepatan, metode pemrograman dan penggunaannya. Berdasarkan penggunaannya, robot dibedakan atas robot personal, robot industri dan robot pendidikan 5,6 . Robot pendidikan yang paling terkenal adalah robot *Cincinnati Milacron* dengan enam derajat kebebasan, semuanya gerak rotasi yakni *Arm sweep*, *Shoulder swivel*, *Elbow extension*, *Yaw*, *Pitch* dan *Roll*. Cincinnati Milacron termasuk jenis robot artikulasi. Jika gerak rotasi *Elbow extension* pada robot *Cincinnati* ini diganti dengan gerak translasi maka robot artikulasi menjadi robot koordinat bola seperti yang akan dibahas dalam tulisan ini.

Untuk menganalisis kombinasi gerakan dari enam derajat kebebasan melalui suatu trayektori tertentu dapat digunakan berbagai metode, yang paling terkenal adalah metode DH (*Denavit-Hartenberg*) yang didalamnya terdapat metode *Quaternion* dan *Rotation Vector* seperti yang akan digunakan dalam tulisan ini 7 . Metode *quaternion* adalah metode untuk mengidentifikasi secara lengkap terhadap arah putaran poros dan sekitar putaran yang terdiri atas empat element; satu *element scalar* dan tiga element vektor. Sementara *Rotation Vector* merupakan vektor tiga dimensi yang terdiri atas empat elemen *quaternion*. Semua ini akan dijelaskan melalui uraian model matematikanya masing masing sampai pada implementasinya pada robot koordinat bola enam derajat kebebasan.

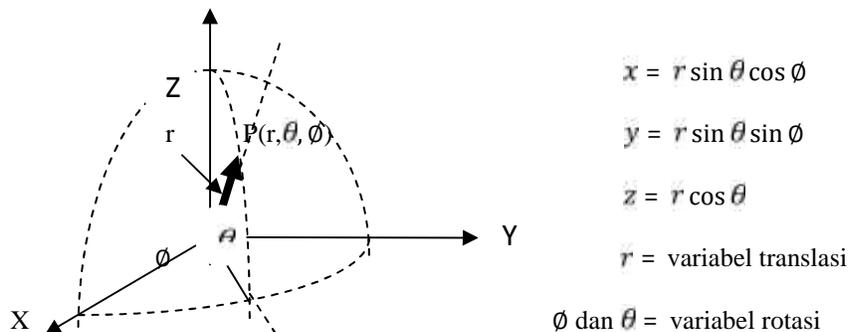
## 1.2 Tujuan, Manfaat dan Batasan Penelitian

Adapun yang menjadi tujuan penelitian ialah menganalisis dengan cara mudah kombinasi sejumlah gerak rotasi dan translasi dari robot robot bermodel matematika rumit karena berderajat kebebasan tinggi (empat derajat kebebasan keatas), menggunakan metode quaternion dan rotation vector. Manfaatnya, memberikan tambahan pengetahuan kepada para pencinta robot untuk semakin mencintai robot sampai pada tingkat yang paling rumit (derajat kebebasan diatas sepuluh). Sementara batasan Penelitian hanya meneliti jenis robot bola enam derajat kebebasan, yakni salah satu jenis robot industry yang dalam pengoperasiannya memerlukan tingkat presisi dan akurasi tinggi. Batasan penelitian lainnya adalah sistem control untuk setiap derajat kebebasan tidak dibahas sampai detail dan tuntas, kecuali hanya gambaran blok diagram *closed loop controlnya*. Penelitian difokuskan pada analisis kinematika pergerakan TCPnya sebagai hal yang paling menarik dan lebih menantang untuk diperkenalkan.

## 2. KAJIAN TEORITIS

### 2.1 Sistem Koordinat Bola 3, 5

Terdapat setidaknya tiga sistem koordinat yang biasa digunakan untuk menganalisis posisi dan gerak dalam ruang tiga dimensi yakni sistem koordinat Cartesius (X,Y,Z), sistem koordinat Silinder ( $\rho, \phi, Z$ ) dan system koordinat Bola ( $r, \theta, \phi$ ). Khusus untuk sistem koordinat Bola, posisi suatu titik dalam sistem koordinat dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1. Sistem Koordinat Bola, 2 Gerak Rotasi  $\phi, \theta$  dan 1 Gerak Translasi  $r$

Perhatikan bahwa, dengan memperhatikan secara saksama dari ketiga sistem koordinat terlihat bahwa sistem koordinat *Cartesius* menghasilkan Robot yang semua dari tiga gerakan dasarnya adalah translasi, sedangkan sistem koordinat silinder menghasilkan robot yang salah satu dari tiga gerakan dasarnya adalah rotasi, sementara sistem koordinat Bola menghasilkan robot yang dua dari tiga gerakan dasarnya adalah rotasi. Jika ketiga gerakan dasarnya semuanya rotasi maka robot yang dihasilkannya merupakan robot artikulasi. Robot robot yang lebih canggih atau rumit merupakan pengembangan dari ketiga kombinasi gerakan gerakan dasar ini. Dari satu sistem koordinat robot dapat dikonversi ke system koordinat robot lainnya.

## 2.2 Robot Koordinat Bola Enam Derajat Kebebasan 6, 7

Robot koordinat Bola dengan enam derajat kebebasan dimaksudkan adalah robot yang manipulatornya dapat bergerak secara bebas melalui kombinasi enam macam gerakan. Pada “*joint dasar*” terdapat tiga gerakan yaitu dua gerak rotasi dan satu gerak translasi dan pada “*joint expansi*” yang merupakan transmisi link dari gerak traslasi dari joint dasar juga terdapat tiga jenis gerakan, semuanya gerak rotasi. Dengan demikian robot bola enam derajat kebebasan memiliki kombinasi gerakan lima rotasi dan satu translasi. Untuk mencapai satu tujuan titik capaian lengan robot “*End Point*” oleh ujung pegang lengan (*wrist*) yang disebut TCP (*Tool Center Point*) memerlukan kombinasi dari enam derajat kebebasan tersebut yang dalam tulisan ini menggunakan metode *Quaternion* dan *Rotation Vector*. Untuk sementara, masing masing dari enam derajat kebebasan dirumuskan dengan:

$$q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6^T = \theta_1, \theta_2, d_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6^T \quad (1)$$

dimana symbol  $q_n$  adalah quaternion,  $\theta_n$  adalah rotasi dan  $d_3$  adalah translasi. Sementara T pada kedua sisi merupakan Matriks Transpose.

## 2.3 Definisi Quaternion 5, 6, 7

*Quaternion* yang dinotasikan dengan “*q*” mempunyai empat elemen; satu elemen scalar dan tiga elemen vektor yang ditulis dengan:

$$q = q_0 + q_n = q_0, q_n = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k \quad (2)$$

dimana  $q_0$  adalah elemen scalar dan  $q_1, q_2, q_3$  adalah elemen vektor dari  $q_n$ . Karakter *i, j, k* yang menyertai setiap elemen vektor tidak lain adalah unit unit vektor pada sumbu *x, y, z* ruang tiga dimensi. Penulisan lain dari quaternion adalah:

$$q = \cos \frac{\theta}{2} + e \sin \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2} + e_1i + e_2j + e_3k \sin \frac{\theta}{2} = \cos \frac{\theta}{2} + \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{matrix} \sin \frac{\theta}{2} \quad (3)$$

yang berarti:  $q_0 = \cos \frac{\theta}{2}, q_1 = e_1 \sin \frac{\theta}{2}, q_2 = e_2 \sin \frac{\theta}{2}, q_3 = e_3 \sin \frac{\theta}{2}$ . Notasi  $e_n$  merupakan unit vektor baru yang harganya 0 atau 1 tergantung pada sudut rotasi  $\theta$  diputar dengan sumbu *quaternion* apa. Sebagai ilustrasi untuk perputaran quaternion dengan sumbu Z maka  $e_1 = 0, e_2 = 0, e_3 = 1$ . Untuk perputaran quaternion dengan sumbu X maka  $e_1 = 1, e_2 = 0, e_3 = 0$  dan untuk perputaran dengan sumbu Y  $e_1 = 0, e_2 = 1, e_3 = 0$ . Perhatikan bahwa *quaternion* hanya berlaku untuk satu perputaran sumbu saja. Vektor transformasi menggunakan *quaternion* dirumuskan dengan:

$$v' = v + 2q_0 qXv + 2qX qXv \quad (4)$$

dimana  $v = v_x, v_y, v_z$  adalah posisi awal vektor dan  $v' = v'_x, v'_y, v'_z$  adalah posisi akhir hasil transformasi. Selanjutnya, baik posisi awal maupun posisi akhir masing masing ditulis dalam notasi vektor  $v = v_x v_y v_z^T$  dan  $v' = v'_x v'_y v'_z^T$ . Notasi X adalah tanda perkalian *CROSS*. Sebagai ilustrasi untuk *quaternion* dengan sumbu putar Z, sudut rotasi  $\theta$ , hasil tranformasi vektor dengan rumus (4) diperoleh:

$$\begin{matrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{matrix} = \begin{matrix} v_x \cos \theta - v_y \sin \theta \\ v_y \cos \theta + v_x \sin \theta \\ v_z \end{matrix} \quad (5)$$

## 2.4 Definisi Successive Vector 5, 6, 7

Perpaduan antara dua quaternion disebut *Successive Vector* yang dapat dinyatakan dengan sebuah *quaternion* baru sebagai hasil perkalian dari kedua quaternion. Jadi, misalkan kedua quaternion adalah  $q_1$  dan  $q_2$  maka *quaternion* baru yang didefinisikan sebagai *Successive Vector* itu dinyatakan dengan:

$$q = q_1 q_2 = q_{01} \cdot q_1 \cdot q_{02} \cdot q_2 = q_{01} q_{02} - q_1 \cdot q_2 \cdot q_{01} q_2 + q_{02} q_1 + q_1 \cdot X q_2 \quad (6)$$

Perhatikan baik baik persamaan (6) ini sebab terdapat tiga jenis perkalian yakni perkalian SKALAR, perkalian DOT dan perkalian *CROSS*. Untuk sebagai ilustrasi, misalkan vektor  $v = 1 \ 0 \ 0^T$  mengalami dua rotasi berurutan, rotasi pertama dengan sumbu Z sebesar  $\theta_z = 90^\circ$ , rotasi kedua dengan sumbu Y sebesar juga  $\theta_y = 90^\circ$ , maka penerapan persamaan (6) yang disubstitusikan ke dalam persamaan (5) menghasilkan posisi baru yang terakhir dari vektor  $v$  yakni  $v' = 0 \ 1 \ 0^T$  dimana dalam proses ini:  $q_1 = q_{01} \cdot q_1 = \frac{1}{2} \cdot 0i + 0j + \frac{1}{2}k$ ,  $q_2 = q_{02} \cdot q_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}i + 0j + 0k$  yang memberikan successive vector:  $q = q_1 q_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}j + \frac{1}{2}k$ . Nilai vektor quaternion gabungan inilah yang menjadi nilai  $q$  pada persamaan (5).

## 2.5 Definisi Rotation Vector 5, 6, 7

Sebuah alternatif untuk merepresentasikan vektor menggunakan vektor tiga dimensi yang berisi empat elemen *quaternion* yang didefinisikan dengan:

$$R = e \tan \frac{\theta}{2} = e f \quad (7)$$

dimana  $e$  = unit vektor sepanjang axis (poros atau sumbu) dari rotasi,  $\theta$  = sudut dari rotasi  $e$  dan  $f = \tan \frac{\theta}{2}$  = magnitude dari *rotation vector*.

Rotation Vector pada persamaan (7) dapat digunakan serupa dengan quaternion untuk transformasi vektor dan dalam penerapan pada representasi rotasi tunggal dari sejumlah rotasi yang dijelaskan sebagai berikut.

Sebuah vektor  $v$  dibawah rotation vector R digunakan untuk membentuk vektor  $v'$  yang dapat diuraikan menjadi:

$$v' = v + \frac{2RXv + RXv}{1+f^2} \quad (8)$$

Selanjutnya, dua *successive rotation vector*  $R_1$  dan  $R_2$  dapat dikombinasikan untuk membentuk rotasi dalam bentuk satu komposisi rotasi dengan rumus:

$$R = R_1 \cdot R_2 = \frac{R_1 + R_2 + R_1 X R_2}{1 - R_1 \cdot R_2} \quad (9)$$

Perhatikan perkalian *DOT* dan perkalian *CROSS* pada persamaan (9) dan ingat perkalian dot dan cross dari unit unit vektor  $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1, i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$  dan sebaliknya. Sementara  $ixi = jxj = kxk = 0, ixj = k, jxk = i, kxi = j$  tetapi sebaliknya  $jxi = -k, kxj = -i, ixk = -j$ . Sebagai ilustrasi, misalkan  $R_1 = 0 \ 0 \ f_1^T$  dan  $R_2 = 0 \ -f_2 \ 0^T$ ,  $\theta_1 = 90^\circ$  dan  $\theta_2 = 60^\circ$  maka hasil transformasi rotation vector dari  $v = 0 \ 2 \ 0^T$  menggunakan persamaan (9) dan kemudian (8) diperoleh  $v' = -2 \ 0 \ 0^T$ .

## 3. METODE PENELITIAN

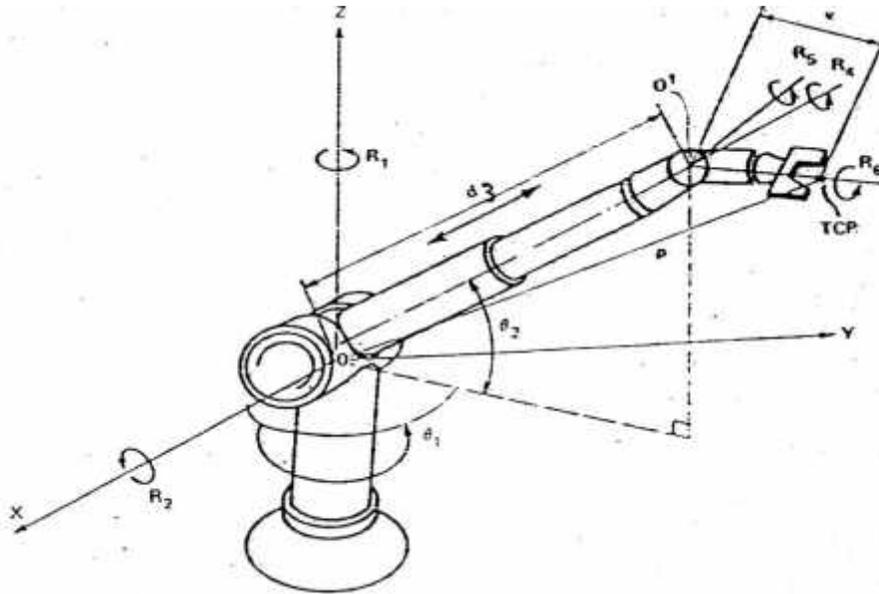
Penelitian ini berbasis teoritis dengan memadukan metode *quaternion*, *successive vector* dan *rotation vector* sebagai instrument analisis terhadap kombinasi enam gerakan bebas dari Robot Bola enam derajat kebebasan (A six degrees of freedom spherical robot).

### 3.1 Struktur Robot Bola enam derajat kebebasan 3, 4, 7

Struktur robot bola enam derajat kebebasan dapat digambarkan seperti gambar 2 berikut ini. Terlihat pada gambar ini terbentuk dua *Joint system* koordinat yakni pada bagian bahu (*Shoulder*) yang berpusat di O dan pada bagian siku (*Elbow*) yang berpusat di O'. Kedua system koordinat dihubungkan oleh Link yang bergerak translasi. Keenam derajat kebebasannya adalah  $\theta_1, \theta_2, d_3$ , yang merupakan koordinat bola dengan rotation vector  $R_1$  dan  $R_2$ , sementara pada ujung link yang bergerak translasi yaitu pada bagian siku terdapat rotation vector  $R_4, R_5, R_6$ . Perhatikan bahwa  $R_1$  merupakan rotation vektor dengan sumbu rotasi adalah sumbu Z,  $R_2$  merupakan *rotation*

vector dengan sumbu rotasi adalah sumbu X. Kedua rotation vector ini menyebabkan perputaran sudut  $\theta_1$  dan  $\theta_2$ . Untuk mengembangkan “jangkauan” link  $d_3$  dapat digerakkan secara translasi.

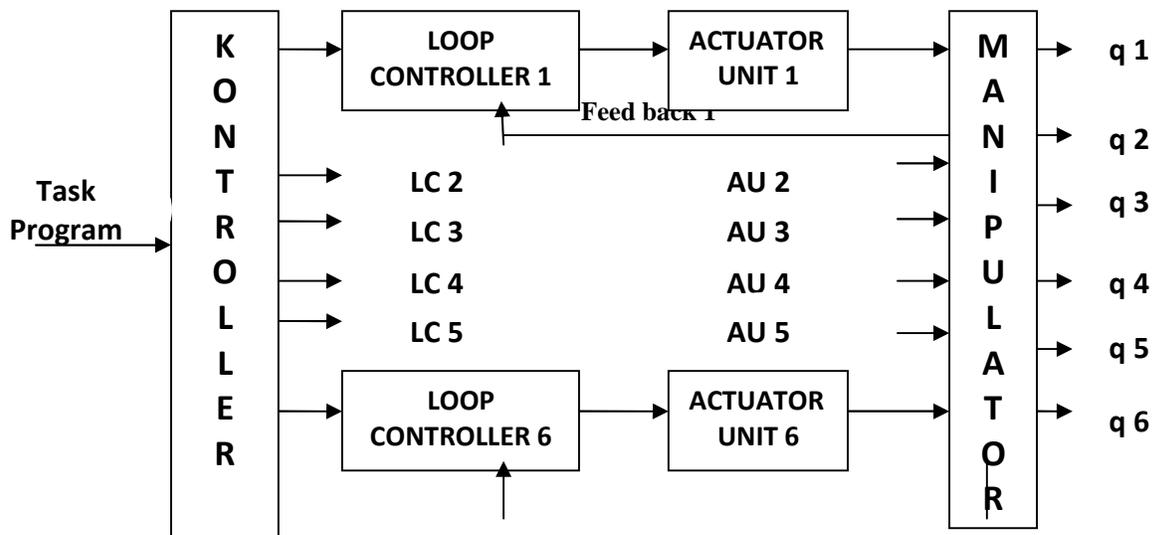
Perhatikan gambar 2, gerak rotasi dari rotation vector  $R_1$  dengan sumbu Z sebagai poros rotasi menyebabkan badan robot bola berputar horizontal sebesar sudut  $\theta_1$ . Jika kemudian dilanjutkan dengan gerak rotasi dari rotation vector  $R_2$  dengan sumbu X sebagai poros rotasi, maka tangan robot akan berputar vertikal sebesar sudut  $\theta_2$ . Pada posisi ini, tangan robot dapat diexpansi (dipanjangkan) ataupun dikontraksi (dipendekkan) secara gerak translasi dengan elevasi sesuai gerakan sebelumnya. Sampai disini pergerakan dari tiga derajat kebebasan pada bahu (*shoulder*) sudah selesai. Tiga lainnya terletak pada siku (*elbow*) pada ujung tangan yang berpusat di  $O'$  yakni rotation vector  $R_3, R_4$  dan  $R_5$ , ketiganya gerak rotasi dengan poros rotasi axis dari tangan, axis dari lengan dan axis dari koordinat siku. Panjang lengan robot termasuk TCP adalah  $v$ . Berbagai kombinasi harga dari ketiga rotation vector ini dapat mengarahkan posisi TCP ke posisi tujuan secara akurat sesuai dengan yang diinginkan.



Gambar 2. Struktur Robot Bola enam derajat kebebasan (Sumber [7])

### 3.2 Komponen Perangkat Keras dan Kontrol [1, 2, 3]

Struktur kontrol untuk robot bola enam derajat kebebasan dapat digambarkan seperti gambar 3 berikut ini:



**Gambar 3. Struktur Kontroler Robot Bola enam derajat kebebasan (sumber 2 )**

Struktur Robot Bola yang digambarkan pada gambar 2, terdiri atas tiga bagian utama yakni:

1. Manipulator, yaitu komponen struktur gerak mekanik
2. *Actuator*, yaitu komponen drive atau penggerak “*joint*” dari manipulator
3. Kontroler: berupa Komputer atau Mikroprocessor atau Mikrokontroler, yaitu komponen untuk menyimpan task program sebagai pengendali.

Pada gambar ini setiap derajat kebebasan memiliki *loop controller* tersendiri. Jadi terdapat enam *loop controller*. Masing masing loop control memiliki Motor penggerak (*actuator*) dan sensor yang membentuk *feed back*. *Loop Controller* dapat berupa Mikroprocessor atau Mikrokontroler yang terpisah dari yang digunakan sebagai Kontroler. Mikroprocessor/Mikrokontroler yang berfungsi pada Kontroler, khusus untuk menyimpan dan memproses task task program yang digunakan. Sementara Mikroprocessor/Mikrokontroler pada *Loop Controller* berfungsi sebagai Komparator dan Pengendali sistem robot. Manipulator sendiri terdiri atas *link* dan *joint* yang menghasilkan enam derajat kebebasan sebagai *output* dari posisi akhir dari TCP yakni  $q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6$ .

### 3.3 Model Matematik Robot Bola enam derajat kebebasan 3, 7

Koordinat dari  $O'$  adalah:

$$O' = \begin{matrix} C'_x & d_3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \\ C'_y & d_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \\ C'_z & d_3 \sin \theta_2 \end{matrix} \quad (10)$$

Solusi dari persamaan (10) ini diperoleh  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  dan  $d_3$  adalah:

$$q_1 = \theta_1 = \tan^{-1} \frac{O'_z}{O'_x} \quad (11)$$

$$q_2 = \theta_2 = \sin^{-1} \frac{O'_z}{d_3} \quad (12)$$

$$q_3 = d_3 = \sqrt{C'_x{}^2 + C'_y{}^2 + C'_z{}^2} \quad (13)$$

Selanjutnya, nyatakan sebuah *composite rotation* yang merupakan perkalian *DOT* dari kelima *rotation vector* dengan:

$$R = R_1 \cdot R_2 \cdot R_4 \cdot R_5 \cdot R_6 \quad (14)$$

yang dapat ditulis sebagai:

$$- R_2 \cdot - R_1 \cdot R = R_4 \cdot R_5 \cdot R_6 \quad (15)$$

yang mana  $R_1$  dan  $R_2$  memiliki variabel yang didefinisikan oleh  $\theta_1$  dan  $\theta_2$  yang akan dihitung. Berdasarkan robot bola yang dinyatakan seperti gambar 2, *rotation vectornya* adalah:

$$R_1 = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & -f_2 \\ f_1 & 0 \end{matrix} \quad R_2 = \begin{matrix} 0 & -f_4 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad R_4 = \begin{matrix} -f_4 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad R_5 = \begin{matrix} 0 & f_5 \\ f_5 & 0 \end{matrix} \quad R_6 = \begin{matrix} f_6 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \quad R = \begin{matrix} R_x \\ R_y \\ R_z \end{matrix} \quad (16)$$

dimana:

$$f_i = \tan \frac{\theta_i}{2} \quad ; i = 1, 2, 4, 5, 6 \quad (17)$$

Jika posisi yang diinginkan dinyatakan dengan  $p$  dimana:

$$\vec{p} = p_x \vec{p}_y \vec{p}_z^T \quad (18)$$

dan  $\vec{v}' = v'_x \vec{v}'_y \vec{v}'_z^T$  merupakan posisi baru dari  $\vec{v} = v_x \vec{v}_y \vec{v}_z^T$  yang dihitung menggunakan *vector transformation* menurut persamaan ( ), maka lokasi dari  $O'$  pada sistem koordinat dasar dapat diturunkan dari persamaan:

$$\vec{O}' = \vec{p} - \vec{v}' \quad (19)$$

Sementara hubungan antara  $\vec{v}'$ ,  $\vec{v}$  dan  $R$  adalah:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \frac{2R \times \vec{v} + R \times \vec{v}}{1+f^2} \quad (20)$$

dimana:

$$f^2 = R_x^2 + R_y^2 + R_z^2 \quad (21)$$

Sebelah kiri dari persamaan (15) dapat diselesaikan secara bertahap, pertama selesaikan perkalian  $DOT -R_2 \cdot -R_1$ , kedua hasilnya dikalikan  $DOT$  lagi dengan  $R$  yakni  $-R_2 \cdot -R_1 \cdot R$ . Dengan demikian hasil dari sebelah kanan persamaan (15) sudah diperoleh. Kedua tahapan itu adalah:

$$-R_2 \cdot -R_1 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ f_2 + 0 & + f_2 \times 0 & & \\ 0 & -f_1 & 0 & -f_1 \\ & 0 & 0 & \\ & 1-f_2 & 0 & \\ & 0 & -f_1 & \end{matrix} \quad (22)$$

Selanjutnya persamaan (22) ini dikali  $DOT$  lagi dengan  $R$ , diperoleh:

$$\begin{aligned} -R_2 \cdot -R_1 \cdot R &= \frac{\begin{matrix} -f_1 f_2 & R_x & -f_1 f_2 & R_x \\ f_2 + R_y & + & f_2 \times R_y & \\ -f_1 & R_z & -f_1 & R_z \\ & -f_1 f_2 & R_x & \\ & 1-f_2 & R_y & \\ & -f_1 & R_z & \end{matrix}}{1+f_1 f_2 R_x - f_2 R_y + f_1 R_z} \\ &= \frac{1}{1+f_1 f_2 R_x - f_2 R_y + f_1 R_z} \begin{matrix} -f_1 f_2 + R_x + f_2 R_z + f_1 R_y \\ f_2 + R_y - f_1 R_x + f_1 f_2 R_z \\ -f_1 + R_z - f_1 f_2 R_y - f_2 R_x \end{matrix} \end{aligned} \quad (23)$$

*Composite vector* ini dapat dinyatakan dengan:

$$R'' = -R_2 \cdot -R_1 \cdot R = \begin{matrix} R''_x \\ R''_y \\ R''_z \end{matrix} = R_4 \cdot R_5 \cdot R_6 \quad (24)$$

yang memberikan solusi dari  $q_4, q_5, q_6$  sebagai berikut:

$$q_4 = \tan^{-1} R''_x + \tan^{-1} \frac{R''_z}{R''_y} \quad (25)$$

$$q_5 = 2 \tan^{-1} \frac{\sqrt{R''_y^2 + R''_z^2}}{1 + R''_x} \quad (26)$$

$$q_6 = \tan^{-1} R''_x - \tan^{-1} \frac{R''_z}{R''_y} \quad (27)$$

## 4. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 4.1 Algoritma Operasional

Berdasarkan landasan teori, yang dikembangkan lebih lanjut pada metode penelitian, maka robot bola enam derajat kebebasan pada gambar 2 dapat memberikan respon untuk berbagai posisi akhir dari TCP yang diinginkan dari kombinasi enam gerakan berbeda. Untuk mendapatkan lokasi setiap posisi digunakan algoritma sebagai berikut:

1. Catat posisi awal dari TCP yakni  $v = v_x \ v_y \ v_z^T$ , misalnya  $v_x = a, v_y = b, v_z = c$
2. Tetapkan titik posisi yang diinginkan  $p = p_x \ p_y \ p_z^T$ , misalnya  $p_x = d, p_y = e, p_z = f$
3. Tetapkan nilai rotation vector  $R = R_x \ R_y \ R_z^T$ , misalnya  $R_x = g, R_y = \bar{2}, R_z = i$
4. Hitung harga dari  $f^2$
5. Hitung posisi baru  $v' = v'_x \ v'_y \ v'_z^T$
6. Hitung harga dari  $O' = p - v'$
7. Hitung nilai pergerakan rotasi dan translasi dari *quaternion*  $q_1, q_2, q_3$
8. Hitung nilai  $f_1$  dan  $f_2$
9. Susun matriks *rotation vector*  $R_1$  dan  $R_2$
10. Hitung  $R''$
11. Hitung nilai pergerakan rotasi dari *quaternion*  $q_4, q_5, q_6$
12. Diperoleh kedudukan akhir yang dimaksud yakni  $q = q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6$  yakni gabungan tahap 6 dan tahap 10.

#### 4.2 Hasil dari Penggunaan Algoritma

Menggunakan algoritma ini, dapat dilakukan perhitungan sebagai berikut:

1. Catat posisi awal dari TCP, misalnya  $v = 1 \ 0 \ 0^T$
2. Tetapkan titik posisi yang diinginkan, misalnya  $p = 0 \ 2 \ 1^T$
3. Tetapkan nilai *rotation vector*, misalnya  $R = 0 \ 0 \ 1^T$
4. Hitung harga dari  $f^2$  dengan rumus (21) diperoleh  $f^2 = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1$
5. Hitung posisi baru  $v'$  menggunakan rumus (20) diperoleh:

$$v' = v + \frac{2RX \ v + R \ X \ v}{1 + f^2}$$

$$v' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{1 + 1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

6. Hitung hari dari  $O'$  dengan rumus (19), diperoleh  $O' = p - v' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
7. Hitung nilai *quaternion*  $q_1, q_2, q_3$  dengan rumus (11), (12) dan (13) diperoleh:

$$q_1 = \theta_1 = \tan^{-1} \frac{O'_y}{O'_x} = \tan^{-1} \frac{1}{0} = \tan^{-1} \infty = 90^\circ$$

$$q_3 = \alpha_3 = \sqrt{O'_x{}^2 + O'_y{}^2 + O'_z{}^2} = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$q_2 = \theta_2 = \sin^{-1} \frac{O'_z}{\alpha_3} = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ$$

8. Hitung nilai  $f_1, f_2$  dengan rumus (17) yakni  $f_i = \tan \frac{\theta_i}{2}$  ;  $i = 1, 2$ , diperoleh:

$$f_1 = \tan \frac{\theta_1}{2} = \tan \frac{90^\circ}{2} = \tan 45^\circ = 1$$

$$f_2 = \tan \frac{\theta_2}{2} = \tan \frac{45^\circ}{2} = \tan 22,5^\circ = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

9. Susun matriks *rotation*  $R_1, R_2$  menggunakan rumus (16) diperoleh:

$$R_1 = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ f_1 & 1 \end{matrix} \quad \text{dan} \quad R_2 = \begin{matrix} 0 & 0 \\ -f_2 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} = -\frac{1}{1+2}$$

10. Hitung  $R''$  dengan rumus (23), diperoleh:

$$R'' = \frac{1}{1+f_1f_2R_x-f_2R_y+f_1R_z} \begin{matrix} -f_1f_2 + R_x + f_2R_z + f_1R_y \\ f_2 + R_y - f_1R_x + f_1f_2R_z \\ -f_1 + R_z - f_1f_2R_y - f_2R_x \end{matrix}$$

$$= \frac{1}{1+0-0+1} + \frac{1}{1+2} - \frac{1}{1+2} = \frac{0}{-1+1} = -\frac{2}{1+2}$$

11. Hitung nilai quaternion  $q_4, q_5, q_6$  dengan rumus (25), (26), (27), diperoleh:

$$q_4 = \tan^{-1}R''_x + \tan^{-1}\frac{R''_z}{R''_y} = \tan^{-1}0 + \tan^{-1}\frac{0}{-1+2} = 0^\circ$$

$$q_5 = 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{R''_y^2 + R''_z^2}}{1 + R''_x} = 2\tan^{-1}\frac{\sqrt{\frac{-2}{1+2}^2 + 0^2}}{1+0} = 45^\circ$$

$$q_6 = \tan^{-1}R''_x - \tan^{-1}\frac{R''_z}{R''_y} = \tan^{-1}0 - \tan^{-1}\frac{0}{-1+2} = 0^\circ$$

12. Diperoleh kedudukan quaternion akhir yang dimaksud yakni q dengan nilai:

$$q = q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ q_5 \ q_6 = 90^\circ \ 45^\circ \ \bar{2} \ 0^\circ \ 45^\circ \ 0^\circ$$

Pada Tabel 1 berikut ini diperlihatkan hasil beberapa koordinat TARGET sebagai tujuan yang ingin dicapai dari sebuah koordinat ASAL sebagai kedudukan awal dari TCP yakni pada koordinat posisi awal 1 0 0 :

**Tabel 1. Berbagai kombinasi gerak translasi dan gerak rotasi Robot bola 6 derajat kebebasan**

No.	TARGET	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$
1	0 2 1	$90^\circ$	$45^\circ$	$\bar{2}$	$0^\circ$	$45^\circ$	$0^\circ$
2	1 0 2	$-45^\circ$	$54,72^\circ$	$\bar{6}$	$129,25^\circ$	$87,80^\circ$	$-26,51^\circ$
3	2 1 0	$0^\circ$	$0^\circ$	2	$90^\circ$	$90^\circ$	$-90^\circ$
4	2 0 1	$-63,43^\circ$	$24,09^\circ$	$\bar{6}$	$129,23^\circ$	$66,81^\circ$	$-45^\circ$
5	0 1 2	$0^\circ$	$90^\circ$	2	$90^\circ$	$35,26^\circ$	$45^\circ$
6	1 2 0	$45^\circ$	$0^\circ$	$\bar{2}$	$90^\circ$	$45^\circ$	$90^\circ$
7	1 2 1	$45^\circ$	$45^\circ$	$\bar{3}$	$54,73^\circ$	$47,06^\circ$	$-35,27^\circ$
8	1 1 1	$0^\circ$	$35,27^\circ$	$\bar{2}$	$90^\circ$	$92,15^\circ$	$-54,73^\circ$
9	2 2 2	$26,57^\circ$	$41,81^\circ$	3	$69,07^\circ$	$65,54^\circ$	$-42,52^\circ$
10	2 1 2	$0^\circ$	$45^\circ$	$2 \bar{2}$	$90^\circ$	$85,47^\circ$	$-45^\circ$

Sumber: Hasil olah data

### 4.3 Pembahasan Hasil

Untuk memindah posisikan TCP dari kedudukan awal  $p = 1 \ 0 \ 0^T$  ke kedudukan akhir  $p = 0 \ 2 \ 1^T$  pada robot koordinat bola enam derajat kebebasan, maka koordinat bola yang berpusat di O yakni bahu (shoulder) robot harus diputar horizontal dengan sudut sebesar  $90^\circ$  dengan sumbu putar adalah sumbu Z, kemudian diputar vertikal dengan sudut sebesar  $45^\circ$  dengan sumbu putar adalah sumbu X, lalu dilanjutkan dengan gerak translasi radius bola sepanjang  $\bar{2}$  satuan.

Selanjutnya, siku (*Elbow*) yang berpusat di  $O'$  dari tiga komponen sumbunya satu harus berputar  $45^\circ$  dan dua lainnya tidak perlu mengalami perputaran (tetap pada posisi sudut  $0^\circ$ ). Keenam proses berurutan dari enam derajat kebebasan tersebut membawa TCP melalui trayektori tertentu ke posisi akhir.

Kemudian untuk memindah posisikan TCP dari kedudukan awal  $\vec{p} = 1 \ 0 \ 0^T$  ke kedudukan akhir  $\vec{p} = 1 \ 0 \ 2^T$  pada robot koordinat bola enam derajat kebebasan, maka koordinat bola yang berpusat di  $O$  yakni bahu (shoulder) robot harus diputar horizontal dengan sudut sebesar  $-45^\circ$  dengan sumbu putar adalah sumbu Z, kemudian diputar vertikal dengan sudut sebesar  $54,72^\circ$  dengan sumbu putar adalah sumbu X, lalu dilanjutkan dengan gerak translasi radius bola sepanjang  $\bar{b}$  satuan.

Selanjutnya, siku (Elbow) yang berpusat di  $O'$  dari tiga komponen sumbunya satu harus berputar  $129,25^\circ$  dan dua lainnya berputar  $87,80^\circ$  dan  $-26,51^\circ$ . Keenam proses berurutan dari enam derajat kebebasan tersebut membawa TCP melalui trayektori tertentu ke posisi akhir. Demikian untuk posisi posisi lainnya yang dapat dilihat pada Tabel 1 hasil olah data diatas.

## 5. KESIMPULAN

1. Sesuai dengan tujuan penelitian diperoleh pengalaman bahwa robot rumit secara matematik, apalagi dengan robot berderajat kebebasan tinggi (didas 4 derajat kebebasan) ternyata dapat ditela'a dan dianalisis secara sederhana dan mudah menggunakan metode *quaternion* dan *rotation vector*.
2. Pengalaman penulis ini dapat menjadi pengalaman bagi kaum pencinta robot untuk mencoba sendiri pada robot rumit sejenis menggunakan tulisan ini, tanpa harus merasa kesulitan. Ikuti secara disiplin dan konsisten Algoritma yang diberikan. Jika menginginkan berbagai variasi *input* dan *output*, algoritma itu dapat digunakan sebagai dasar untuk membuat *task-task* program simulasi.

## DAFTAR PUSTAKA

- 1 Braunl, Thomas. 2003. *Embedded Robotics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- 2 Fogiel. 1990. *Automatic Control Systems/Robotics*. Research and Education Associatio 61 Ethel Road West Piscataway, New Jersey 08854.
- 3 Parallax. 2006. *Robotics with the Boe Bot*. Parallax Corps, USA.
- 4 Pitowarno, Endra. 2006. *Robotika Disain Kontrol dan Kecerdasan Buatan*. Andi Offset Yogyakarta.
- 5 Williams, Karl. 2004. *Build Your Own Humanoid Robots*. Mc Graw Hill.
- 6 [www.joker-robotics.com](http://www.joker-robotics.com)
- 7 Yoram Korem. 1985. *Robotics for Engineers*. Mc Graw Hill Book Company.